$$X = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 2 & 2t-\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t^{-2} + 2t^{-1} - 2\ln t - 2 \\ 5t^{-1} - 4\ln t - 4 \end{bmatrix}$$

عمومی   خصوصی

توابع متعامد : orthogonal Functions

(مثلاً sin , cos که در ۹۰° بر یکدیگر عمود هستند)

مجموعه توابع زیر را در نظر بگیرید : $\{\phi_n(x)\}$, $n=1,2,\ldots$

مجموعه توابع فوق را متعامد گویند اگر دارای خاصیت زیر باشند :

$$\int_a^b \phi_n(x) \cdot \phi_m(x)\, w(x)\, dx = \begin{cases} =0 & n \neq m \\ \neq 0 & n = m \end{cases}$$

تابع وزن ($w(x)$)

آنگاه آن مجموعه توابع را، متعامد نسبت به تابع وزن $w(x)$ در فاصله $[a,b]$ می‌نامیم.

قضیه strom-liovill e (اشتروم-لیوویل)

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید :

$$\frac{d}{dx}\left(P(x)\frac{dy}{dx}\right) + \left[-q(x) + \lambda w(x)\right]y = 0$$

که $P(x)$ ، $q(x)$ و $w(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشند اگر شرایط مرزی زیر برقرار باشد :

$$\begin{cases} a_1 y(a) + b_1 y'(a) = 0 , & a_1^2 + b_1^2 \neq 0 \\ a_2 y(b) + b_2 y'(b) = 0 , & a_2^2 + b_2^2 \neq 0 \end{cases}$$

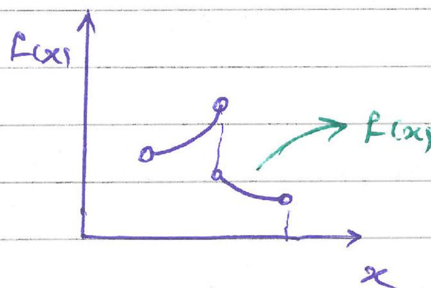
که در آن a_i و b_i اعداد ثابتی هستند.

PAN

آن وقت چنانچه $\phi_n, \phi_{n-1}, \ldots, \phi_2, \phi_1$ جواب‌های معادله فوق به ازای به ترتیب $\lambda_n, \lambda_{n-1}, \ldots, \lambda_2, \lambda_1$ باشند، ϕ_n ها تشکیل یک مجموعه‌ای از توابع متعامد (نسبت به تابع وزن $w(x)$ در بازه $[a,b]$) را می‌دهند.

یعنی:
$$\{\phi_n(x)\} \longrightarrow \int_a^b \phi_n \phi_m w \, dx = \begin{cases} =0 & n \neq m \\ \neq 0 & n = m \end{cases}$$

قضیه: توابع ویژه هر مسئله از نوع اشترم لیوویل تشکیل یک مجموعه کامل می‌دهند و هر تابع مانند $f(x)$ که خودش و مشتقش در فاصله $[a,b]$ به صورت قطعه قطعه پیوسته باشد را می‌توان بر حسب توابع ویژه بیان کرد و به صورت یک سری بسط داد.



$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

با ضرب طرفین این رابطه در $w(x)$ و $\phi_m(x)$ و انتگرال گیری از رابطه حاصل:

$$\int_a^b f(x)\phi_m(x)w(x)\,dx = \int_a^b \phi_m(x)w(x)\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)\,dx$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b w\phi_n\phi_m\,dx$$
$$= c_m \int_a^b w\phi_m^2\,dx$$

در نتیجه:
$$C_m = \frac{\int_a^b f(x)\phi_m(x)w(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\phi_n^2(x)\,dx}$$

PAN

توضیح: سری فوق در نقاط غیر پیوسته، به متوسط حد چپ و راست به آن نقطه میل می‌کند.

- معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه ۲ خاص:

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$F(x)y'' + g(x)y' + (h_1(x) + \lambda h_2(x))y = 0$$

درصورتی که بخواهیم این معادله را بصورت اشتروم لیوویل در آوریم با ضرب طرفین در فاکتور انتگرال‌گیری به معادله زیر خواهیم رسید:

فاکتور انتگرال‌گیری $\frac{1}{F} \exp\left[\int \frac{g}{F} dx\right]$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + \left[-q(x) + \lambda w(x)\right]y = 0$$

که در آن:

$$p = \exp\left[\int \frac{g}{F} dx\right] \qquad q = \frac{-p h_1}{F}$$

توابع مختلف از حل معادله دیفرانسیل بالا (S-L) حاصل می‌شود:

تابع	$p(x)$	$q(x)$	λ	$w(x)$	توضیح
مثلثاتی	1	0	ω^2	1	—
لژاندر	$1-x^2$	0	$n(n+1)$	1	$p(1)=0$ است پس شرط $y(1)=$ محدود، $y'(1)=$ محدود
شبه لژاندر	$1-x^2$	$\frac{-m^2}{(1-x)^2}$	$n(n+1)$	1	
چبیشف (نوع اول)	$(1-x^2)^{1/2}$	0	n^2	$(1-x^2)^{-1/2}$	
بسل	x	$-\nu^2/x$	B^2	x	$p(0)=0$ است پس شرط مرزی $y(0)=$ محدود، $y'(0)=$ محدود شرط کافی است
لاگر	xe^{-x}	0	α	e^{-x}	
هرمیت	e^{-x^2}	0	2α	e^{-x^2}	—

در جدول فوق m و n اعداد صحیح و α، B، ν، ω مقادیر ثابت هستند.

تابع گاما (Gamma):

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad x > 0$$

ثابت می‌شود

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \circledast$$

نتایج کاربردی:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(2) = 1\,\Gamma(1)$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2!$$

$$\vdots$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

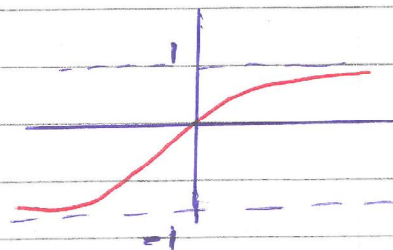
تابع بتا (Beta):

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx \quad n,m > 0$$

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

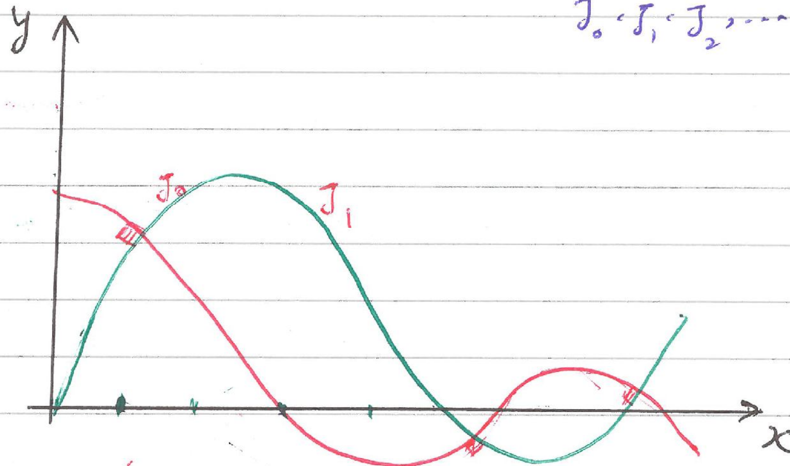
تابع خطا: (Error Funtion):

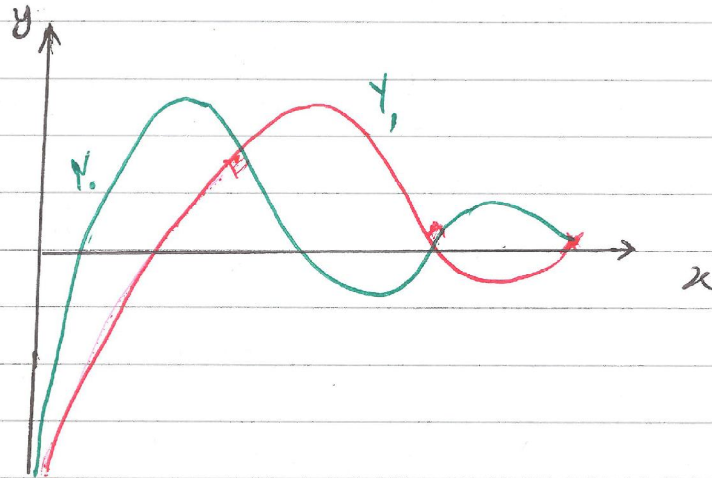
$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$



تابع مکمل خطا : $erfc(x) = 1 - erf(x)$

تابع بسل $J_0, J_1, J_2, \dots$





جلسه نهم ۹۲,۸,۱۴ ۴۷

معادله لژاندر :

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$$

عدد صحیح

به ازای $n=0,1,2,\dots$

دارای حل عمومی $y=AP_n(x)+BQ_n(x)$

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}$$

شعاع همگرایی $|x|<1$

$$\begin{cases} N=\frac{n}{2} & \text{برای n های زوج} \\ N=\frac{n-1}{2} & \text{برای n های فرد} \end{cases}$$

$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$P_3(x)=\dots\dots$$

$$Q_0(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$Q_n(x)=\frac{1}{2}P_n(x)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\sum_{r=0}^{N}(-1)^{n+2r}\frac{(2n-4r-1)}{(2r+1)(n-r)}P_{n-2r-1}(x)$$

شعاع همگرایی $|x|<1$

$N=\frac{n-2}{2}$ برای n های زوج

$N=\frac{n-1}{2}$ برای n های فرد

خواص چندجمله‌ای لژاندر :

$P_n(1)=1$

$P_n(-1)=(-1)^n$

$\vdots$

فرمول رودریگز

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

خاصیت تعامد چندجمله ای های لژاندر :

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x)P_n(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{اگر } n \neq m \\ \frac{2}{2n+1} & \text{اگر } n = m \end{cases}$$

معادلات دیفرانسیل خطی پاره‌ای مرتبه دوم خاص :

۱) معادله لاپلاس $\nabla^2 u = 0$

۲) معادله پواسون $\nabla^2 u = g(x_1, \ldots, x_n)$

۳) معادله هلمهولتز $\nabla^2 u + \lambda u = 0$

۴) معادله دیفیوژن $\nabla^2 u = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t}$

ضریب انتشار

۵) معادله موج $\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

یکی از روش های حل این دسته از معادلات استفاده از روش جدایی متغیرها است.

معادله دیفیوژن $u(x, y, z, t) = \phi(x, y, z)T(t)$ (مکان، زمان)

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 u &= T \nabla^2 \phi \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \phi T' \end{aligned}\right\} \longrightarrow \text{جایگذاری در معادله}$$

$$\frac{\nabla^2 \phi}{\phi} = \frac{1}{\alpha} \frac{T'}{T} = -\lambda$$

$$\rightarrow \left| \begin{aligned} &\nabla^2 \phi + \lambda \phi = 0 \longrightarrow \text{معادله هلمهولتز} \\ &T' + \alpha \lambda T = 0 \longrightarrow \text{جواب نمایی} \end{aligned} \right.$$

PAN

۴۸

معادله موج :

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$u = \phi(x,y,z).T(t)$$

به همین شکل $\longrightarrow \dfrac{\nabla^2 \phi}{\phi} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{T''}{T} = -\lambda$

$\nabla^2\phi + \lambda\phi = 0 \longrightarrow$ معادله هلمهولتز

$T'' + c^2\lambda T = 0 \longrightarrow$ جواب مثلثاتی

حالت کلی زیر را در نظر بگیریم :

$$Z = Z(x,y)$$

$$a\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + d\frac{\partial Z}{\partial x} + e\frac{\partial Z}{\partial y} + fZ = g$$

اگر $g=0$ باشد معادله همگن میشود . a,b,c,d,e,f توابعی از (x,y) هستند .

جواب تابع زمان و مکان است ولیکن به یک حالت پایا نمی‌تواند برسد و مرتباً با زمان تغییر می‌کند .

شرایط مرزی و شرایط اولیه توأم جواب مسئله را تعیین میکند و در نهایت جواب به حالت پایدار میرسد .

if $b^2 - 4ac > 0$ هذلولی

if $b^2 - 4ac = 0$ سهموی

if $b^2 - 4ac < 0$ بیضوی

فقط مرزها هستند که جواب مسأله را تعیین میکنند (حالت دائمی)

معادله کلی فوق به روش جداکردن متغیرها قابل حل نیست ولی اگر فرم معادله به صورت زیر باشد به روش جدایی متغیرها قابل حل است :

$$a_1(x)\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + a_2(x)\frac{\partial Z}{\partial x} + a_3(x)Z + b_1(y)\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + b_2(y)\frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$+ b_3(y)Z = 0$$

میتوان جواب را به صورت زیر در نظر گرفت :

$$Z = XY = X(x)Y(y)$$

PAN

با مشتق گیری و جایگذاری در معادله :

$$\frac{1}{X}\left[a_1(x)\frac{d^2X}{dx^2}+a_2(x)\frac{dX}{x}+a_3(x)X\right]=-\frac{1}{Y}\left[b_1(y)\frac{d^2Y}{dy^2}+b_2(y)\frac{dY}{dy}+b_3(y)Y\right]$$

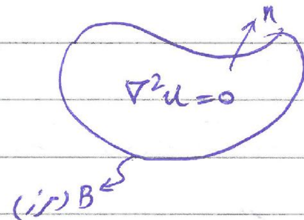
پس از جدا کردن متغیرها داریم :

$$a_1X''+a_2X'+[a_3\pm\lambda^2]X=0$$

$$b_1Y''+b_2Y'+[b_3\pm\lambda^2]Y=0$$

نکته : باید توجه داشت که شرایط مرزی باید از نوعی باشند که معادلات فوق به فرم (S-L) درآیند و از طریق روش جدایی متغیرها قابل حل باشند !

- حل معادله دیفرانسیل پاره ای لاپلاس :



۱- شرط مرزی نوع اول (دیریکله)

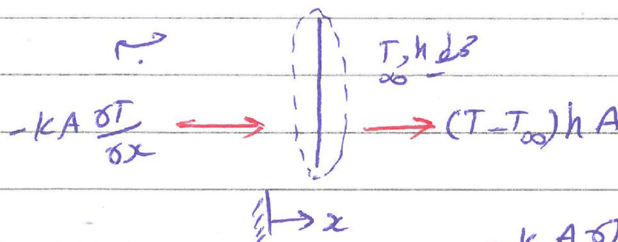
$U=F_1(S)$ روی مرز B

مثال : ثابت بودن دما روی سطح جسم

۲- شرط مرزی نوع دوم (نیومن) . $\frac{\partial u}{\partial n}=F_2(S)$

مثال : معین بودن نرخ انتقال حرارت در سطح جسم

۳- شرط مرزی نوع سوم



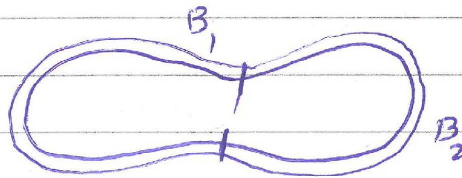
$$-kA\frac{\partial T}{\partial x}-hA(T-T_\infty)=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}+h(S)U=F_3(S)$$

۵.

مثال: تساوی نرخ انتقال حرارت هدایتی و جابه‌جایی در جسم

۴ـ شرط مرزی نوع چهارم



شرایط مرزی متناوب روی B_1 و B_2 مثلاً:

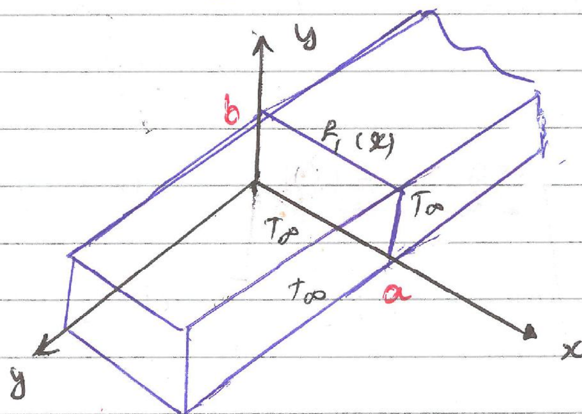
روی B_1 $\quad U = F_4(s)$

روی B_2 $\quad \frac{\partial u}{\partial n} = F_5(s)$

مثال: ترکیبات حالات نوع (۱ تا ۳)

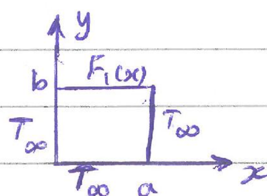
حل معادله لاپلاس (X, Y, Z) به کمک جدایی متغیرها

بدون از دست دادن کلیت مسأله برای حالت دوبعدی حل می‌کنیم:



حل

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$



B.C
$$\begin{cases} T(0,y) = T_\infty \\ T(a,y) = T_\infty \\ T(x,0) = T_\infty \\ T(x,b) = F_1(x) \end{cases}$$

$\longrightarrow$ ناهمگن

PAN

۵)

برای این که بتوان از روش جدای متغیرها استفاده کرد تغییر متغیر می دهیم. (به منظور همگن کردن شرایط مرزی)

$$\theta = T - T_\infty$$

لذا

$$\theta(0, y) = 0 \quad (a)$$
$$\theta(a, y) = 0 \quad (b)$$
$$\theta(x, 0) = 0 \quad (c)$$
$$\theta(x, b) = F_1(x) - T_\infty = f_1(x) \quad (d)$$

جدای متغیرها:
با جستجوگری و جایگذاری

$$\theta = X(x)\,Y(y)$$

$$X''Y + Y''X = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\gamma$$

طوری باید در نظر بگیریم که در جهتی که شرایط مرزی همگن است. جواب جمله از نوع (S-L) شود

$$\begin{cases} X'' + \gamma X = 0 \\ Y'' + \gamma Y = 0 \\ X(0)\,Y(y) = 0 \xrightarrow{B.C} X(0) = 0 & (a_1) \\ X(a)\,Y(y) = 0 \longrightarrow X(a) = 0 & (b_1) \\ X(x)\,Y(0) = 0 \longrightarrow Y(0) = 0 & (c_1) \\ \theta(x, b) = f_1(x) \sim \text{تعیین ضرایب} & (d_1) \end{cases}$$

۱) حالت اول $\gamma = 0$

$$X = Ax + B \xrightarrow{B.C} \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(a) = 0 \end{cases} \Rightarrow X(x) = 0$$

$$Y = Cy + D \longrightarrow$$

پس جواب T صفر خواهد شد پس $\gamma = 0$ جواب نیست.

PAN

۲) حالت دوم $\gamma = -\lambda^2$ ← عدد حقیقی

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2 \rightarrow \begin{cases} X'' - \lambda^2 X = 0 \\ Y'' + \lambda Y = 0 \end{cases}$$

$$X = A\sinh(\lambda x) + B\cosh(\lambda x)$$

$$Y = c\sin(\lambda y) + D\cos(\lambda y)$$

$$\rightarrow \begin{cases} X(0) = 0 & B=0 \\ X(a) = 0 & A=0 \end{cases} \longrightarrow X(x) = 0$$

پس $\gamma = -\lambda^2$ نیز جواب نیست !

---

۳) حالت سوم $\gamma = +\lambda^2$

$$X = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)$$

$$Y = c\sinh(\lambda y) + D\cosh(\lambda y)$$

B.C $\rightarrow$

$$a_1 \longrightarrow X(0) = 0 \Rightarrow X = a\sin(\lambda x)$$

$$c_1 \longrightarrow Y(0) = 0 \Rightarrow Y = c\sinh(\lambda y)$$

$$b_1 \longrightarrow X(a) = 0 \Rightarrow$$

اگر $A=0$ ← در اینصورت $X=0$ می شود و به جواب نمی رسیم

$$\sin(\lambda a) = 0$$

$$\Rightarrow a\lambda_n = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, \dots$$

بنابراین جواب به صورت زیر است:

$$\theta_n(x,y) = A_n \sin(\lambda_n x) C_n \sinh(\lambda_n y)$$

$$= E_n \sin(\lambda_n x) \sinh \lambda_n y$$

$$\theta(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin(\lambda_n x) \sinh(\lambda y)$$

? (written in red above E_n)

PAN

محاسبه ضرایب مجهول E_n ← اعمال شرط مرزی d_1

انتگرال → $\int_0^a \theta_n(x,b)\,dx = \int_0^a E_n \sin(\lambda_n x)\sinh(\lambda_n b)\,dx$

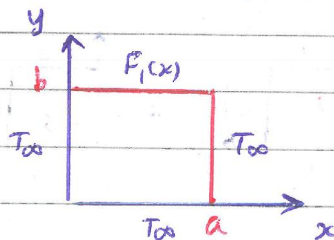
برای استفاده از شرط تعامد توابع sin، طرفین رابطه فوق را در $\sin(\lambda_n x)$ ضرب کرده و از طرفین $\int_0^a dx$ انتگرال می‌گیریم.

$$E_n = \frac{2}{a\sinh(\frac{n\pi b}{a})}\int_0^a F_1(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx$$ ← یک عدد ثابت

نهایتاً:

$$\theta_n(x,y) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi x}{a})\sinh(\frac{n\pi y}{b})}{\sin(\frac{n\pi b}{a})}\int_0^a F_1(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx$$

جلسه ششم   ریاضی مهندسی   ۹۲,۸,۷

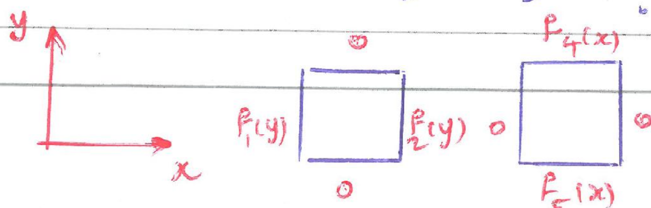


نکات مربوط به مثال آخر (جلسه قبل):

(۱) تغییر تابع $\theta = T - T_\infty$ الزامی است:

زیرا موجب همگن شدن شرایط مرزی می‌شود (که مطابق شرایط مرزی ب، آ، م ... است). در غیر این صورت شرط مرزی سه بالایی ($F_1(x)$) یعنی شرط (d) قابل اعمال نیست.

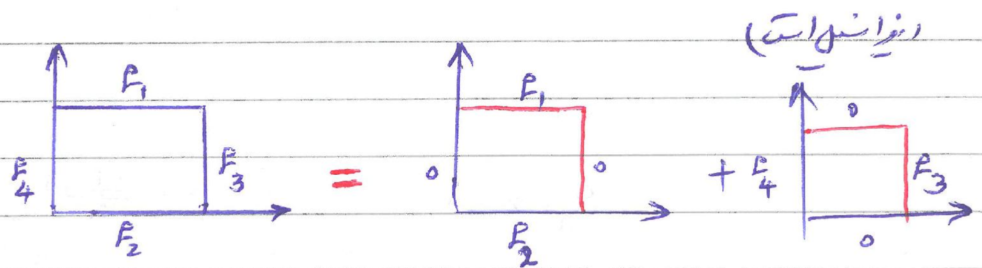
(۲) اگر معادله لاپلاس در مختصات دکارتی داشته باشیم، شرط آنکه توسط روش جداسازی متغیرها قابل حل باشد، این است که حتماً در یک جهت (x یا y) شرایط همگن باشند.



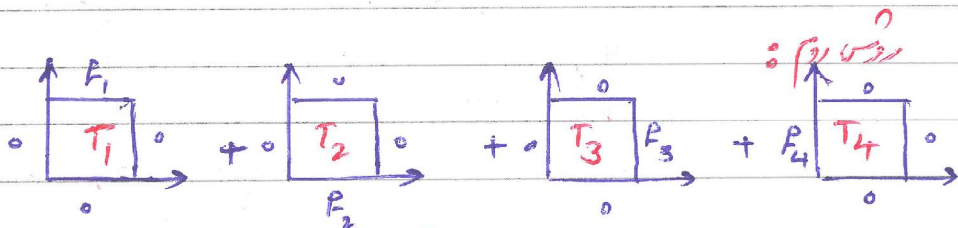
۳- علامت ثابت تفکیک ($\pm\lambda^2$ یا λ^2)

در جهتی که شرایط مرزی همگن است، لازم است که مسئله از نوع S-L باشد، علامت $\pm\lambda^2$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که در جهتی که شرایط مرزی همگن است، مسئله S-L ایجاد شود.

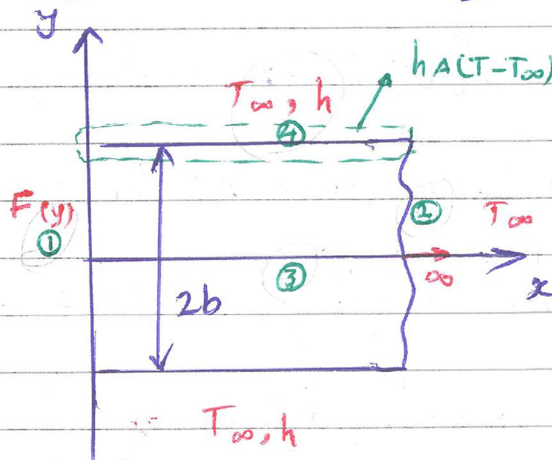
۴- اگر شرایط در تمام جهات غیرهمگن باشند، از روش سوپرپوزیشن استفاده می‌کنیم. (دلیل آن خطی بودن معادله دیفرانسیل است)



$$T(x,y) = T_1(x,y) + T_2(x,y)$$



حل معادله لاپلاس در صورتیکه شرایط مرزی به صورت مشتق روی سطح باشد.



تعیین شده پی نوشت فوق را در نظر بگیرید

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$$

شرایط مرزی : (استفاده از شرایط تقارن)

(1) $T(0,y)=F(y)$

(2) $T(\infty,y)=T_\infty$

(3) $\frac{\partial T(x,0)}{\partial y}=0$ ⟶ چون تقارن دارد

(4) $-k\frac{\partial T(x,b)}{\partial y}=h\left(T(x,b)-T_\infty\right)$

$\theta=T-T_\infty$ چون شرایط مرزی ۴ جزء ـ ۲ نیست تغییر متغیر می‌دهیم :

$\nabla^2\theta=0$

ناهمگن
1) $\theta(0,y)=F(y)-T_\infty=f(y)$
2) $\theta(\infty,y)=0$

همگن
(3) $\frac{\partial\theta(x,0)}{\partial y}=0$
(4) $-k\frac{\partial\theta}{\partial y}(x,b)-h\,\theta(x,b)=0$

در این حالت شرایط مرزی در جهت y همگن است : پس معادله در جهت y به فرم ـ ۲ در آمده است.

و علامت λ^2 در معادله در جهت y مثبت و در معادله x منفی است. $\theta(x,y)=X(x)Y(y)$

$$\nabla^2\theta=0\rightarrow X''Y+Y''X=0\Rightarrow\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=+\lambda^2$$

$X''-\lambda^2X=0$ تابع جواب غیر متناوب
$Y''+\lambda^2Y=0$ تابع جواب متناوب

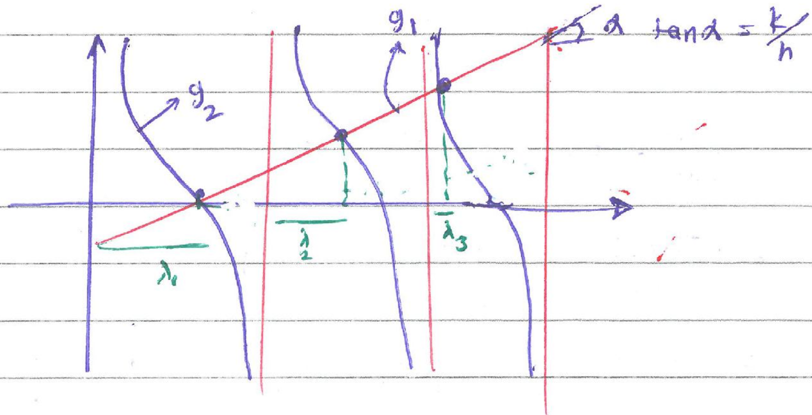
B.C:
$Y'(0)=0$ (a)
$kY'(b)+hY(b)=0$ (b)
$X(\infty)=0$ (c)

PAN

$$\theta(x,y) = \underbrace{(A_1 e^{-\lambda x} + A_2 e^{\lambda x})}_{X(x)}\underbrace{(B_1\cos\lambda y + B_2\sin\lambda y)}_{Y(y)}$$

(a) شرط $\Rightarrow B_2 = 0$

(b) شرط $\Rightarrow k\lambda\sin\lambda b = h\cos\lambda b \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{k}{h}\right)\lambda}_{g_1} = \underbrace{\cot\lambda b}_{g_2}$

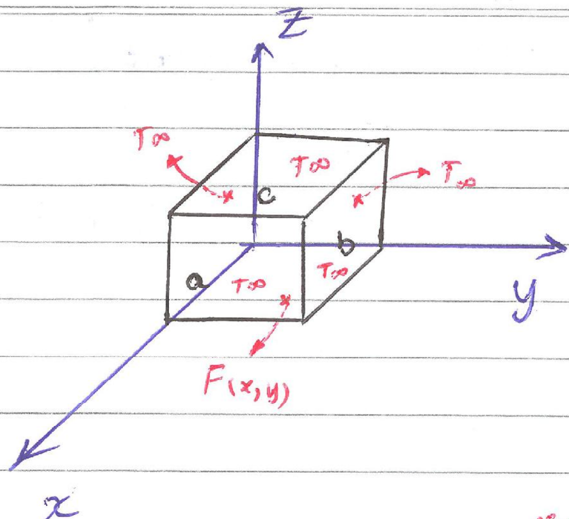


(c) شرط : $\Rightarrow A_2 = 0$

$$\theta(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x}\cos\lambda_n y$$

استفاده از شرط تعامد توابع cos :

(d) شرط $a_n = \frac{2\lambda_n}{\lambda_n b + \sin(\lambda_n b)\cos(\lambda_n b)}\int_a^b f(y)\cos\lambda_n y\, dy$



حل معادله لاپلاس در ۳ بعد

$$\nabla^2 T = 0 \xrightarrow{\theta = T - T_\infty} \nabla^2 \theta = 0$$

$$\theta = T - T_\infty$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0$$

B.C :

x همگن
$$\begin{cases} \theta(0, y, z) = 0 & (1) \\ \theta(a, y, z) = 0 & (2) \end{cases}$$

y همگن
$$\begin{cases} \theta(x, 0, z) = 0 & (3) \\ \theta(x, b, z) = 0 & (4) \end{cases}$$

z ناهمگن
$$\begin{cases} \theta(x, y, c) = 0 & (5) \\ \theta(x, y, 0) = F(x,y) - T_\infty = f(x,y) & (6) \end{cases}$$

درجهت x و y همگن است ← مسئله S-L

لذا باید ثابت λ را طوری تعیین کرد که مسئله درجهت x و y همگن شود (جواب به صورت sin و cos)

$$\theta(x, y, z) = X(x)\, Y(y)\, Z(z)$$ (دقت کنید)

$$\frac{-X''}{X} = \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = +\lambda^2$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ -\dfrac{Y''}{Y} = \dfrac{Z''}{Z} - \lambda^2 = +\beta^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ Y'' + \beta^2 \lambda = 0 \\ Z'' - (\lambda^2 + \beta^2) Z = 0 \end{cases}$$

$$\theta = (A_1\cos\lambda x + A_2\sin\lambda x)(B_1\cos By + B_2\sin By)\times(c_1 e^{z\sqrt{\lambda^2+B^2}} + c_2 e^{-z\sqrt{\lambda^2+B^2}})$$

اعمال B.C :

$$\lambda^2+B^2 = \gamma^2$$

$$(5) \rightarrow c_2 = -c_1 e^{2c\sqrt{\lambda^2+B^2}}$$

$$Z(c) = 0 \Rightarrow c_1 \sinh\gamma c + c_2 \cosh\gamma c = 0$$

$$c_2 = -c_1 \tanh\gamma c$$

$$(1),(3) \Rightarrow A_1 = 0 , B_1 = 0$$

$$\Rightarrow Z(z) = c_1(\sinh\gamma z - \frac{\sinh\gamma c}{\cosh\gamma c}\cosh\gamma z)$$

$$(2),(4) \Rightarrow \begin{cases} \sin\lambda a = 0 \rightarrow \lambda_m = \frac{m\pi}{a} , m=1,2,\dots \\ \sin B b = 0 \rightarrow B_n = \frac{n\pi}{b} , n=1,2,\dots \end{cases}$$

$$= \frac{c_1}{\cosh\gamma c}(\sinh\gamma z \cosh\gamma c - \cosh\gamma z \sinh\gamma c)$$

$$= C \sinh\gamma(z-c)$$

$$\theta_{mn} = A_{mn}\sin\lambda_m x \sin B_n y \sinh\left[\sqrt{B_n^2+\lambda_m^2}\,(c-z)\right]$$

$$\theta(x,y,z) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\sin\lambda_m x \sin B_n y \times \sinh\left[\sqrt{\lambda_m^2+B_n^2}\,(c-z)\right]$$

برای محاسبه A_{mn} ← اعمال شرط (6)

$$(6) \rightarrow \int f(x,y) = \int \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\sinh\left[\sqrt{\lambda_m^2+B_n^2}\,c\right]\times \sin\lambda_m x \sin B_n y \, dx\,dy$$

استفاده از تعامد $\sin\lambda x$, $\sin B_n y$:

$$A_{mn} = \frac{4}{ab}\left\{\sinh\left[\sqrt{\lambda_m^2+B_n^2}\,c\right]\right\}^{-1} \times \int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin\lambda_m x \sin B_n y \, dx\,dy$$

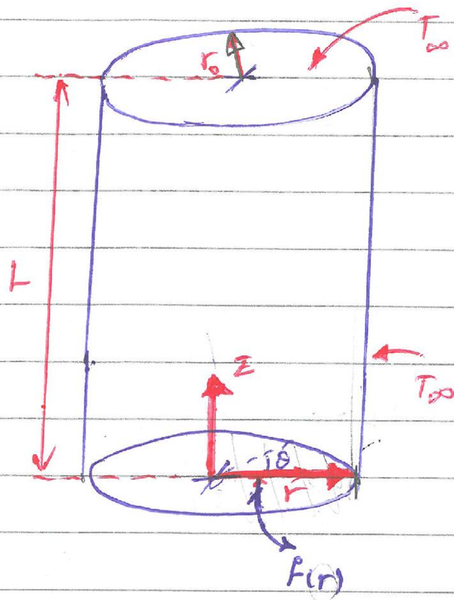
اینجا پیدا منفی کجا رفت؟

مثال: حل معادله لاپلاس در مختصات استوانه‌ای:

مطلوب است توزیع دما در استوانه مقابل :

(تغییر θ نداریم چون در تمام θ ها یکسان است)

برای همگن کردن شرایط مرزی ← تغییر متغیر



$$\theta = T - T_\infty$$

خواهیم داشت :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\theta}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = 0$$

B.C

جهت r:
$$\theta(0, z) = \text{Finite} \quad \text{محدود}$$
$$\theta(r_0, z) = 0$$

جهت z:
$$\theta(r, L) = 0$$
$$\theta(r, 0) = f(r) - T_\infty = f(r)$$

$$\boxed{\theta(r, z) = R(r)\, Z(z)}$$

مسأله در جهت r همگن است. لذا مسأله چون در یک جهت با شرایط مرزی همگن است. در فرم S-L قرار میگیرد.

با ارزش مشتق و ضرب در r

(معادله بسل با $\nu = 0$)

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{Z''}{Z} = -\lambda^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR}{dr}\right) + \lambda^2 rR = 0 \\ Z'' - \lambda^2 Z = 0 \end{cases}$$

$$\theta(r, z) = 0$$

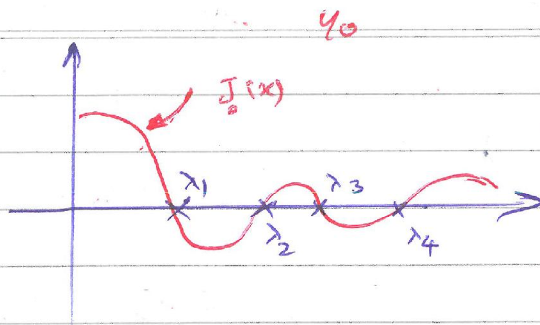
$$\left[A_1 J_0(\lambda r) + A_2 Y_0(\lambda r)\right] \times \left[B_1 \sinh\lambda z + B_2 \cosh\lambda z\right]$$

B.C :

$$\theta(0) = \text{محدود} \Rightarrow A_2 = 0$$

$$\theta(r_0, z) = 0 \Rightarrow J_0(\lambda r_0) = 0$$

PAN



$$J_0(\lambda_n r_0) = 0 \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\theta(r, L) = 0 \Rightarrow B_1 \sinh \lambda L + B_2 \cosh \lambda L = 0$$

$$B_2 = \frac{-B_1 \sinh \lambda L}{\cosh \lambda L}$$

در نتیجه :

$$B_1 \sinh \lambda z + B_2 \cosh \lambda z = B_1 \sinh \lambda z - \underbrace{B_1 \frac{\sinh \lambda L}{\cosh \lambda L}}_{B_2} \cosh \lambda z$$

$$= -B_1 \frac{\sinh \lambda (L - z)}{\cos \lambda L}$$

بنابراین :

$$\theta(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n r) \sinh \lambda_n (L - z)$$

محاسبه a_n ها با کمک تعامد توابع بسل :

اعمال شرط مرزی آخر :

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n r) \sinh \lambda_n L$$

اعمال شرط تعامد :

$$\int_0^{r_0} f(r) J_0(\lambda_n r)\, r\, dr = \int_0^{r_0} a_n J_0^2(\lambda_n r) \sinh \lambda_n L\, r\, dr$$

اگر $J_0(\lambda_n r_0) = 0$

آنگاه $\int_0^{r_0} J_0^2(\lambda_n r)\, r\, dr = \frac{r_0^2}{2} J_1^2(\lambda_n r_0)$

با کمک این خاصیت :

$$a_n = \frac{2}{\sinh(\lambda_n L)\, r_0^2\, J_1^2(\lambda_n r_0)} \int_0^{r_0} r\, f(r)\, J_0(\lambda_n r)\, dr$$

حل معادله دیفیوژن ۱ :

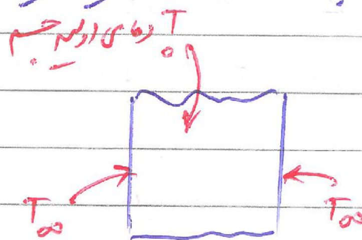
$$\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

انتقال حرارت غیردائم یا انتقال جرم :

توجه: معادله دیفیوژن به طریق جداسازی متغیرها قابل حل است. اگر کلیه شرایط مرزی همگن باشند.

انتقال حالت یک بعدی :

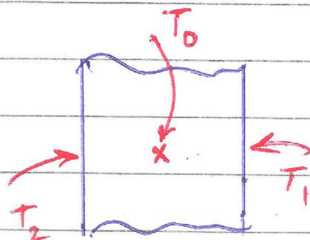
مثال ۱ :



با تغییر متغیر $\theta = (T - T_\infty)$ شرط مرزی همگن می‌شود.

← از جداسازی متغیرها می‌توان استفاده کرد.

مثال ۲ :



در این حالت مسأله را به دو مسأله حل می‌کنیم.

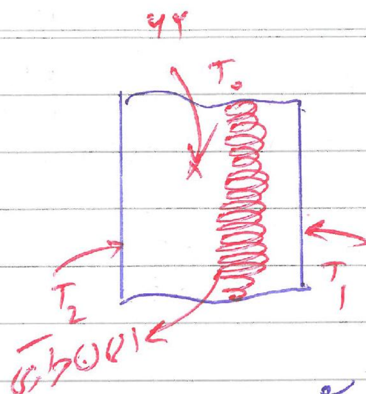
جواب کلی = جواب دائمی + جواب گذرا

(جواب دائمی ← شرایط مرزی غیرهمگن ؛ جواب گذرا ← شرایط مرزی همگن)

$$T(x,t) = T_s(x) + T_t(x,t)$$

نکته: عدم همگنی شرایط مرزی را به جواب دائمی مربوط می‌کنند.

حالت ③



در این حالت معادله دیفرانسیل غیرهمگن خواهد بود.

شار حرارتی تولیدی توسط المان

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q_0}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

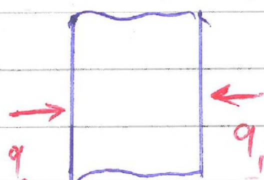
$$T(x,t) = T_s(x) + T_t(x,t)$$

معادله دیفرانسیل حاکم ←   معادله دیفرانسیل حاکم

با شرایط مرزی غیرهمگن $\frac{d^2 T_s}{dx^2} + \frac{q(x)}{k} = 0$ $\frac{\partial^2 T_t}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T_t}{\partial t}$ با شرایط مرزی همگن

حالت ④. خود منبع حرارتی تابع زمان باشد ← حالت کلی ← به روش جدا سازی متغیرها قابل حل نیست ← روش حل از تابع گرین.

حالت ⑤ :



اگر در مرزها شار حرارتی داشته باشیم در این صورت لازم است جواب را سه قسمتی به صورت زیر در نظر گرفت :

$$T(x,t) = T_1(x,t) + T_2(x) + T_3(t)$$

علت اینکه نمی‌توانم جواب را به صورت دو بخشی در نظر بگیرم :

$$\nabla^2 T_t = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T_t}{\partial t} \Rightarrow T_t = X(x)\,\Gamma(t)$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha}\frac{\Gamma'}{\Gamma} = -\lambda^2$$

$$\therefore \quad \Gamma = Ae^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$\text{as } t\to\infty \Rightarrow T_t \to 0 \Rightarrow T = T_s(x)$$

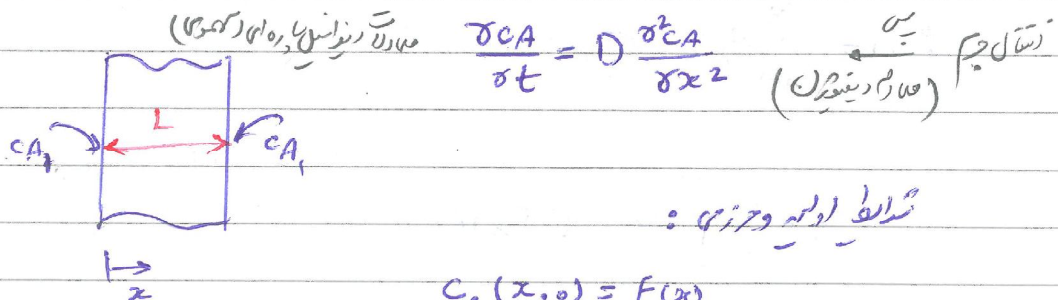
در این صورت جواب حاصله در شرایطی که $t \to \infty$ تابع زمان است و نمی‌توانم در $t \to \infty$ مسئله را بررسی کنم

از نظر ریاضی حل شده است اما از لحاظ فیزیکی اشکال وجود دارد.

چون q_1 و q_2 همواره وجود دارند و لذا دما به طور مداوم افزایش پیدا می‌کند (یا کاهش) در نتیجه هیچ‌گاه ممکن نیست به دما به حالت پایا برسد.

جلسه هفتم ۹۲٫۸٫۲۳

مثال: غلظت اولیه جزء A در تیغه‌ای از جامد B برابر $F(x)$ است. ضخامت تیغه L است. تیغه ناگهان در محیط قرار می‌گیرد که غلظت در سطح برابر C_{A1} می‌گردد. مطلوب است توزیع غلظت گذرای A در جامد B.



$$C_A(x,0) = F(x)$$

$$C_A(0,t) = C_A(L,t) = C_{A1}$$

تغییر متغیر: $\phi = C_A - C_{A1}$

چون وقتی مسئله از روش جدایی متغیرها حل می‌شود که در جهت x شرایط مرزی همگن باشد.

لذا:
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

با شرایط مرزی همگن زیر و شرط اولیه مربوطه:

PAN

$$\phi(x,0) = F(x) - c_{A_1} = f(x)$$

$$\phi(0,t) = \phi(L,t) = 0$$

جدای متغیر‌ها :

$$\phi(x,t) = X(x)\,\Gamma(t)$$

بنابراین با جایگذاری :

$$\frac{1}{D}\frac{\Gamma'}{\Gamma} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \longrightarrow X(0) = X(L) = 0 \\ \Gamma' + D\lambda^2\Gamma = 0 \end{cases}$$

بنابراین :

$$\phi = e^{-D\lambda^2 t}\left(A \sin\lambda x + B\cos\lambda x\right)$$

با اعمال شرایط مرزی :

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-D\lambda_n^2 t}\sin(\lambda_n x) \quad (?!)$$

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

محاسبه A_n ها از شرایط اولیه :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

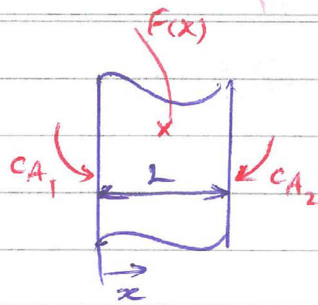
با توجه به تعامد sin داریم :

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

در نتیجه :

$$\phi = C_A - C_{A_1} = \left\{\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 D t}\sin(\lambda_n x) * \int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx\right\}$$

مثال:



$$\frac{1}{D}\frac{\partial C_A}{\partial t} = \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2}$$

در این حالت شرایط مرزی همگن نیست و باید مسئله را به صورت مجموع یک حالت گذرا و یک حالت دائمی در نظر گرفت.

$$C_A(x,t) = C_{A_t}(x,t) + C_{A_s}(x)$$

جواب گذرا — حالت پایا (دائمی)

1)
$$\begin{cases} \dfrac{d^2 C_{AS}}{dx^2} = 0 \\ C_{AS}(0) = C_{A_1} \\ C_{AS}(L) = C_{A_2} \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} \dfrac{1}{D}\dfrac{\partial C_{At}}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 C_{At}}{\partial x^2} \\ C_{At}(0,t) = C_{At}(L,t) = 0 \\ C_{At}(L,t) = F(x) - C_{AS}(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_{At}(0,t) + C_{AS}(0) = C_{A_1} + 0$$

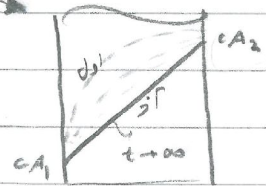
چون شرایط اولیه معادله (2) به جواب معادله (1) وابسته است بنابراین ابتدا معادله (1) را حل کنیم تا $C_{AS}(x)$ را بیابیم.

حالت پایداری :

$$c_{A_S}(x) = (c_{A_2} - c_{A_1})\frac{x}{L} + c_{A_1}$$

$x = 0 \rightarrow c_{AS} = c_{A_1}$

$x = L \rightarrow c_{AS} = c_{A_2}$



حالت گذرا :

$$c_{At} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n^2 D t} \sin \lambda_n x$$

بنابراین :

$$F(x) = cA_1 + (c_{A_2} - c_{A_1})\frac{x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x$$

و یا :

$$F(x) - c_{A_1} - (c_{A_2} - c_{A_1})\frac{x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x$$

با توجه به تعامد sin :

$$A_n = \frac{2}{n\pi}\left[(-1)^n cA_2 - cA_1\right] + \frac{2}{L}\int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

قضیه دوهامل : Duhamel Theorem

معادله دیفرانسیل زیر را درنظر بگیرید :

$$\nabla^2 u = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}$$

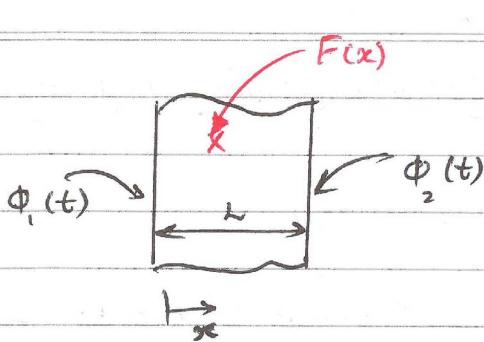
$I.C \rightarrow u(x, y, z, t) = 0$

$B.C \rightarrow u = \phi(x, y, z, t)$ B روی مرز

اگر $u = F(x, y, z, \tau, t)$ حل معادله دیفرانسیل فوق باشد. برای حالتی که شرایط مرزی تابعی از زمان نیست، با قرار دادن شرایط مرزی به صورت $\phi(x, y, z, \tau)$ جواب معادله برای حالتی که شرایط مرزی تابع زمان است. از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$u = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} F(x, y, \tau, t-\tau)\, d\tau$$

مثال :



حل :

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2}$$

$$\begin{cases} C_A(x,0) = F(x) & \text{اولیه} \\ C_A(0,t) = \phi_1(t) & \\ C_A(L,t) = \phi_2(t) & \text{مرزی} \end{cases}$$

در این مسئله شرایط مرزی تابع زمان است و شرایط اولیه این مسأله صفر نیست. لذا باید برای بکار بردن قضیه دوهامل شرایط اولیه صفر شود. لذا برای این کار حل را به دو زیر مسأله می‌شکنیم تا شرایط قضیه را بسازیم :

$$C_A(x,t) = u(x,t) + v(x,t)$$

$$1)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = F(x) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = D\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ v(x,0) = 0 & \leftarrow I.C \\ v(0,t) = \phi_1(t) & \\ v(L,t) = \phi_2(t) & B.C \end{cases}$$

مسأله (1) را در شروع بحث حل کردیم برای حل مسئله دوم (2) وقتی که

معادله دیفرانسیل مربوطه
$$\begin{cases} v(x,0) = 0 \\ v(0,t) = C_{A1} \\ v(L,t) = C_{A2} \end{cases}$$

برای شرایط مرزی و اولیه روبرو در مثال قبل حل شد.

PAN

لذا طبق تفسیر دوهامل و با توجه به شکل قبل می‌توان جایگذاری زیر را انجام داد:

$C_{A_2} \longrightarrow \phi_2(\tau)$

$C_{A_1} \longrightarrow \phi_1(\tau)$

لذا جواب $v(x,\tau,t)$ خواهد شد:

$$v(x,\tau,t) = \phi_1(\tau) + \left[\phi_2(\tau) - \phi_1(\tau)\right]\frac{x}{L} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\phi_2(\tau) - \phi(\tau)}{n} \times e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 D t}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

با جایگذاری $t-\tau$ به جای t خواهیم داشت:

$$v(x,\tau,t-\tau) = \phi_1(\tau) + \left[\phi_2(\tau) - \phi_1(\tau)\right]\frac{x}{L} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\phi_2(\tau) - \phi_1(\tau)}{n} \times e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 D(t-\tau)}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

از عبارت بالا نسبت به t مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{-2\pi D}{L^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\phi_2(\tau) - \phi_1(\tau)\right] n \times e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 D(t-\tau)} \times \sin\frac{n\pi x}{L}$$

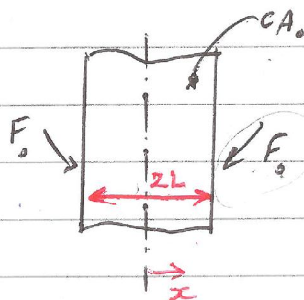
و نهایتاً با انتگرال‌گیری $\int_0^t \frac{\partial u}{\partial t} d\tau$ خواهیم داشت.

$$v(x,t) = \frac{2\pi D}{L^2}\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 D t}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \times \int_0^t e^{(\frac{n\pi}{L})^2 D\tau}\left[\phi_1(\tau) - (-1)^n\phi_2(\tau)\right] d\tau$$

$t \to \infty \ , u = 0 \ , v \neq 0$

جلسه هفتم ۹۲/۸/۲۰

مثال: غلظت در دیواره را وقتی که شار F_0 اعمال می‌شود بدست آورید.



حل: چون تقارن داریم می‌توانیم تنها نیمه x مثبت را در نظر بگیریم:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2}$$

$C_A(x,0) = C_{A_0}$ اولیه (1)

$\frac{\partial C_A(L,t)}{\partial x} = F_0$ مرزی (2)

$\frac{\partial C_A(0,t)}{\partial x} = 0$ (3)

تغییر تابع : $\phi = c_A - c_{A_0}$ (از نظر ریاضی الزامیست، اختیاری)

$$\frac{1}{D}\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \qquad \begin{cases} \phi(x,0) = 0 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x}(0,t) = 0 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x}(L,t) = F_0 \end{cases}$$

چون شار جرم داریم، بنابراین جواب را به صورت ۳ قسمتی در نظر می‌گیریم :

$$\phi(x,t) = \phi_1(x,t) + \phi_2(x) + \phi_3(t)$$

با جایگذاری در معادله دیفرانسیل :

$$\frac{1}{D}\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{\partial \phi_3}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{d^2 \phi_2}{dx^2}$$

اکنون معادله را به صورتی مجزا می‌کنیم که شرایط مرزی مسأله مربوط به ϕ_1 به صورت همگن درآید

و به دو دستگاه زیر می‌رسیم :

$$\frac{1}{D}\frac{\partial \phi_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2}$$

$$\text{I} \begin{cases} \dfrac{\partial \phi_1(0,t)}{\partial x} = \dfrac{\partial \phi_1(L,t)}{\partial x} = 0 & (1) \text{ و } (2) \\ \phi_1(x,0) = -\phi_2(x) - \phi_3(0) & (3) \end{cases}$$

$$\text{II} \begin{cases} \dfrac{1}{D}\dfrac{d\phi_3}{dt} = \dfrac{d^2\phi_2}{dx^2} = C = \text{ثابت} \\ \dfrac{d\phi_2(0)}{dx} = 0 & (4) \\ D\,\dfrac{d\phi_2(L)}{dx} = F_0 & (5) \end{cases}$$

$$(1),(2),(4) \rightarrow \frac{\partial \phi_1(L,t)}{\partial x} + \frac{d\phi_2(L)}{dx} = F_0 + 0$$

PAN

با توجه به دسته معادلات (II) خواهیم داشت:

$$\phi_3(t) = Dct + c_1$$

$$\phi_2(x) = \frac{1}{2}Dcx^2 + c_2 x + c_3$$

$$(4),(5) \rightarrow c_2 = 0 \ , \ c_1 = \frac{F_0}{DL}$$

بنابراین:

$$\phi_3(t) = \frac{F_0}{L}t + c_1$$

$$\phi_2(t) = \frac{F_0}{2DL}x^2 + c_3$$

چون c_1 و c_3 در شرایط اولیه (شرط 3) معادله (I) خودشان را نشان خواهند داد احتیاجی به نوشتن c_1 و c_3 نداریم. (به صورت اختیاری صفر فرض می‌شوند)

$$\phi_3(t) = \frac{F_0}{L}t \ , \ \phi_2(x) = \frac{F_0}{2DL}x^2$$

محاسبه ϕ_1:

$$\phi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-D\lambda_n^2 t}\cos\lambda_n x$$

چون در مرزها مشتق ϕ_1 باید صفر باشد و نه خود ϕ_1

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L} \ , \ n = 0,1,2,\dots$$

با اعمال شرط سوم معادله (I) خواهیم داشت:

$$-\frac{F_0}{2DL}x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\lambda_n x = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\lambda_n x$$

$$\phi_1(x,0) = -\phi_2(x) - \phi_3(0) = -\frac{F_0}{2DL}x^2 - c_3 - c_1$$

در a_n هضم می‌شوند

با استفاده از تعامد cos داریم:

$$a_n = \frac{F_0}{DL^2}\int_0^L x^2\cos\lambda_n x\,dx \rightarrow a_n = \frac{-2F_0L(-1)^n}{D(L\lambda_n)^2} \ , \ n = 1,2,\dots$$

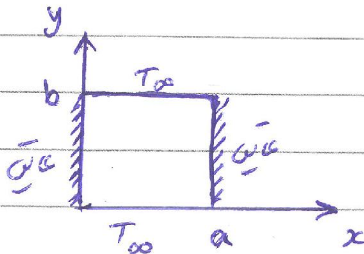
$$a_0 = -\frac{F_0 L}{[illegible]} \qquad a_0 = \frac{1}{l}\left(-\frac{F_0}{[illegible]}\right)\int^{l} x^2\,dx = -\frac{F_0 l}{[illegible]}$$

نهایتاً

$$\phi(x,t) = \phi_1(x,t) + \phi_2(x) + \phi_3(t)$$

$$= \frac{F_0 L}{D}\left\{ \frac{Dt}{L^2} + \frac{3x^2 - L^2}{6L^2} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} e^{-D\lambda_n^2 t}\cos\frac{n\pi x}{L}\right\}$$

حل معادله دیفیوژن در دو بعد:



$$T(x,y,t) = ?$$

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

مثال: در لحظه $t=0$ جسم فوق را از دو طرف عایق می‌کنیم و از دو طرف دیگر به دمای T_∞ تماس داده می‌شود. درصورتیکه در لحظه $t=0$، توزیع دما در جسم به صورت $T(x,y,0) = f(x,y)$ باشد، توزیع دما را برای $t>0$ پیدا کنید.

حل: برای همگن کردن شرایط مرزی ← تغییر متغیر:

$$\theta = T - T_\infty$$

در این صورت

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

I.C اولیه $\quad \theta(x,y,0) = f(x,y) - T_\infty = F(x,y)$

B.C $\quad \frac{\partial \theta(0,y,t)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \theta(a,y,t)}{\partial x} = 0$

$\qquad \theta(x,0,t) = 0 \quad , \quad \theta(x,b,t) = 0$

$$\theta(x,y,t) = \phi(x,y)\,\Gamma(t)$$

$$\Gamma' + \lambda^2 \alpha \Gamma = 0$$

$$\nabla^2 \phi + \lambda^2 \phi = 0 \quad \text{معادله هلمهولتز}$$



$$\phi(x,y) = X(x)\,Y(y) \quad \text{حل معادله دوم}$$

PAN

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \lambda^2 = 0$$

بعد در دو جهت x و y شرایط مرزی مسأله S-L وابسته به هم تا بتوان شرط اولیه $F(x,y)$ را اعمال نمود.

$$\frac{X''}{X} = -\left(\frac{Y''}{Y} + \lambda^2\right) = -\mu^2$$

① $X'' + \mu^2 X = 0 \quad , \quad X'(0) = X'(a) = 0$

$Y'' + (\lambda^2 - \mu^2)Y = 0 \quad , \quad \lambda^2 - \mu^2 = \gamma^2$

② $Y'' + \gamma^2 Y = 0 \quad , \quad Y(0) = Y(b) = 0$

① $\rightarrow X = A\cos\mu x + B\sin\mu x$

$B = 0 \quad , \quad \mu = \frac{m\pi}{a} \quad , \quad m = 0, 1, 2, \ldots$

$X_m = A\cos\frac{m\pi x}{a}$

② $\rightarrow Y = C\cos\gamma y + D\sin\gamma y$

$C = 0 \quad , \quad \gamma = \frac{n\pi}{b} \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$

$$\lambda^2_{mn} = \mu^2_m + \gamma^2_n = \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2$$

$$\Gamma_{mn} = E_{mn} e^{-\alpha\lambda^2_{mn} t}$$

$$\theta(x,y,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} e^{-\alpha\lambda^2_{mn} t} \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}$$ نهایی

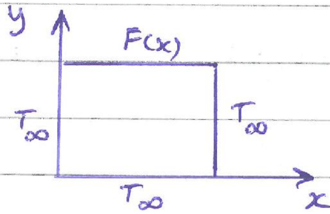
$$F(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$a_{0n} = \frac{2}{ab}\int_0^a\int_0^b F(x,y)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx\,dy$$

$$a_{mn} = \frac{\int_0^a\int_0^b F(x,y)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx\,dy}{\int_0^a\int_0^b \sin^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\cos^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx\,dy}$$

PAN

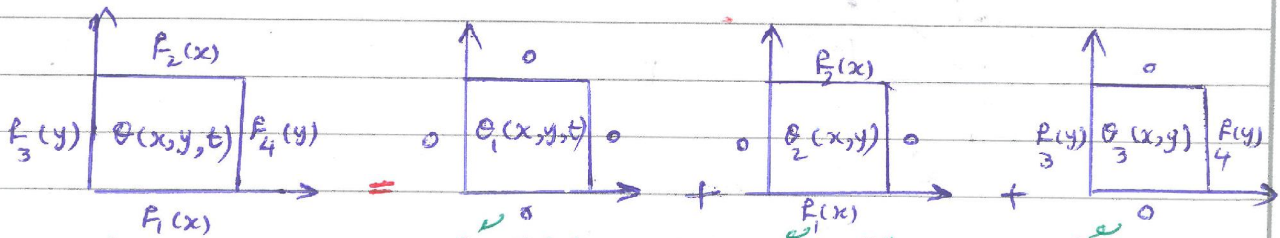
توجه ۱: در سطح زیر باید در دو جهت x و y شرایط مرزی همگن باشد تا بتوان از روش جدایی متغیرها استفاده کرد.



$$\theta(x,y,t) = \theta_1(x,y) + \theta_2(x,y,t)$$

دائمی — گذرا

توجه ۲:



معادله حاکم: دیفیوژن
غیر همگن در تمام جهات ها

دیفیوژن همگن در تمام جهات

لاپلاس همگن در جهت x

لاپلاس همگن در جهت y

حل گذرا — حل دائمی

$$= \theta_1(x,y,t) + \theta_2(x,y) + \theta_3(x,y)$$

حل معادله موج:

